

Helmut K. H. Lange

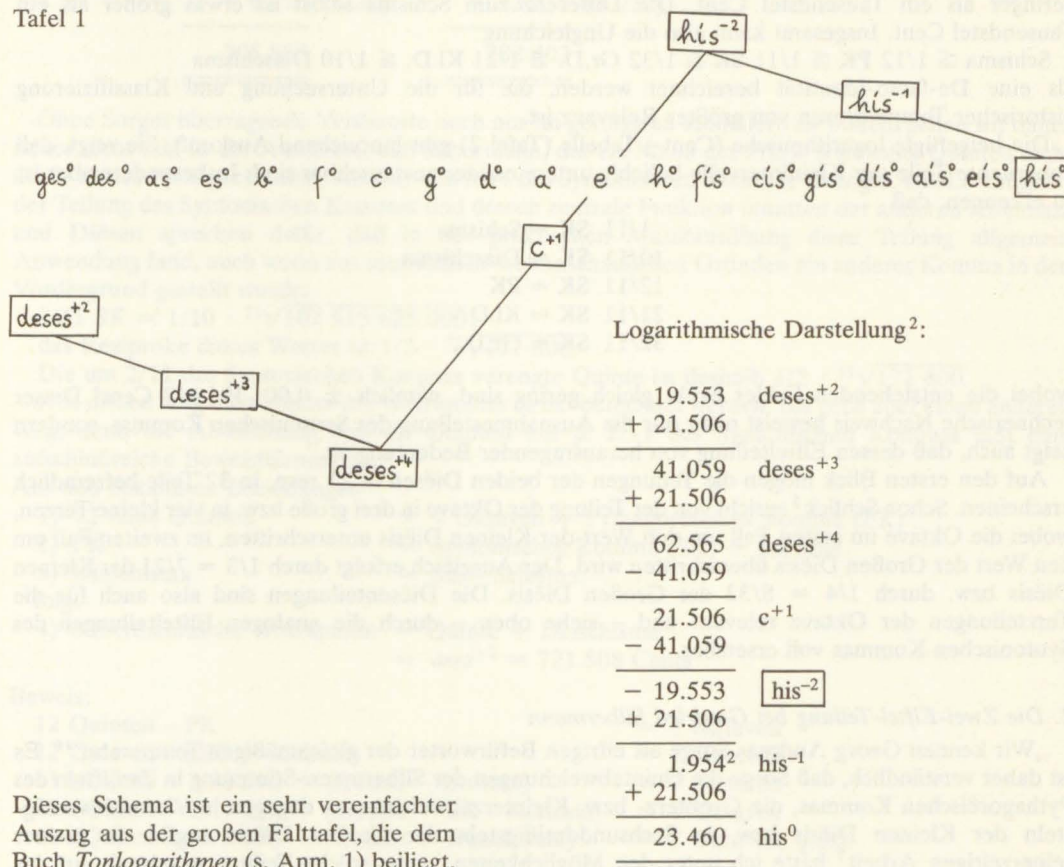
# Über die Bedeutung des Syntonischen Kommas und seine Verwendung in der Orgelstimmung Gottfried Silbermanns\*

## 1. Teilungen der Kommata und Diësen

Am Tongewebe der reinen Stimmung<sup>1</sup> läßt sich optisch sehr schön demonstrieren, daß die sechs historisch wichtigsten Kommata und Diësen durch eine einfache Beziehung miteinander verknüpft sind. Verknüpfungspunkt ist der negative Wert des Diaschismas, der – oktaviert – den Ton  $his^{-2}$  des reinen Tonsystems ergibt; logarithmisch (in Cents) sieht das so aus:  $-19.553 + 1200.000 = 1180.447$ . Die Verknüpfungsintervalle sind das Syntonische Komma und die Kleine Diësis.

Beginnt man mit dem Diaschisma ( $deses^{+2}$ ) und addiert zweimal je ein Syntonisches Komma, so erhält man nacheinander die Kleine ( $deses^{+3}$ ) und Große Diësis ( $deses^{+4}$ ). Sodann werden zweimal je eine Kleine Diësis subtrahiert, wodurch man nacheinander das Syntonische Komma ( $c^{+1}$ ) und das negative Diaschisma ( $his^{-2}$ ) erhält. Durch abermalige zweimalige Addition des Syntonischen Kommas erhält man nacheinander das Schisma ( $his^{-1}$ ) und das Pythagoräische Komma ( $his^0$ ).

Tafel 1



\* Diese Arbeit ist in ihrer Gesamtheit in *Acta organologica* 16 (1982), S. 248, erschienen.

<sup>1</sup> H. K. H. Lange, *Tonlogarithmen*, Wilhelmshaven 1978.

<sup>2</sup> Beim Rechnen mit Logarithmen entstehen zuweilen in der letzten Dezimalstelle Auf- oder Abrundungsfehler.



Verbindet man in der Tafel 1<sup>3</sup> diese sieben Intervallpunkte durch eine farbige Linie, so stellt man fest, daß der Ton  $c^{+1}$  Mittel- und Symmetriepunkt ist; die Mittelpunktsfunktion dieses Tones zeigt auch die logarithmische Darstellung. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß dem Syntonischen Komma, das ja durch den Ton  $c^{+1}$  repräsentiert wird, eine Art Schlüsselposition innerhalb der Kommata und Diësen zukommt. So wußten schon die Alten<sup>4</sup> um die näherungsweise Kongruenz dieser Kleinintervalle. Allerdings sind die Gleichheiten zwischen der Elftel- und Zwölftelteilung des Syntonischen und Pythagoräischen Kommas einerseits und der Vierundzwanzigstel- und Sechsenddreißigstelteilung der Kleinen und Großen Diësis andererseits nicht recht befriedigend.

Aus der vorgeführten Äquidistanz der Kommata und Diësen ist zu folgern, daß es eine Beziehung geben muß, die alle Kleinintervalle gleich gut miteinander verbindet. Wegen der bekannten Beziehung  $PK \text{ minus } SK = SK \text{ minus Diaschisma} = \text{Schisma}$  müssen die Variablen dieser Beziehung ungefähr der Größe des Schismas entsprechen. Daß ein Elftel des Syntonischen und ein Zwölftel des Pythagoräischen Kommas diese Forderung erfüllen, ist bekannt. Eine logarithmische Untersuchung ergibt, daß ein Zehntel des Diaschismas, ein Einundzwanzigstel der Kleinen Diësis und ein Zweiunddreißigstel der Großen Diësis dieser Bedingung ebenfalls Genüge leisten. Die Übereinstimmung der kongruenten Teile der fünf größeren Kleinintervalle unter sich geht so weit, daß Differenzen erst in der vierten Dezimalstelle der Logarithmen auftreten, d. h. die entstehenden Fehler sind geringer als ein Tausendstel Cent. Die Differenz zum Schisma selbst ist etwas größer als ein Tausendstel Cent. Insgesamt kann also die Ungleichung

$\text{Schisma} \leq 1/12 PK \leq 1/11 SK \leq 1/32 \text{ Gr.D.} \leq 1/21 \text{ Kl.D.} \leq 1/10 \text{ Diaschisma}$  als eine De-facto-Identität bezeichnet werden, die für die Untersuchung und Klassifizierung historischer Temperaturen von größter Relevanz ist.

Die beigelegte logarithmische (Cent-) Tabelle (Tafel 2) gibt hinreichend Auskunft. Sie zeigt, daß kongruente Teile der Kleinintervalle beliebig untereinander austauschbar sind. Insbesondere aber ist zu erkennen, daß

$$\begin{aligned} 1/11 SK &\approx \text{Schisma} \\ 10/11 SK &\approx \text{Diaschisma} \\ 12/11 SK &\approx PK \\ 21/11 SK &\approx \text{Kl.D.} \\ 32/11 SK &\approx \text{Gr.D.,} \end{aligned}$$

wobei die entstehenden Fehler exakt gleich gering sind, nämlich  $\pm 0.001396448$  Cent! Dieser rechnerische Nachweis beweist nicht nur die Ausnahmestellung des Syntonischen Kommas, sondern zeigt auch, daß dessen Elftelteilung von herausragender Bedeutung ist.

Auf den ersten Blick mögen die Teilungen der beiden Diësen in 21 resp. in 32 Teile befremdlich erscheinen. Schon Schlick<sup>5</sup> spricht von der Teilung der Oktave in drei große bzw. in vier kleine Terzen, wobei die Oktave im ersten Fall um den Wert der Kleinen Diësis unterschritten, im zweiten Fall um den Wert der Großen Diësis überschritten wird. Der Ausgleich erfolgt durch  $1/3 = 7/21$  der Kleinen Diësis bzw. durch  $1/4 = 8/32$  der Großen Diësis. Die Diësenteilungen sind also auch für die Terzteilungen der Oktave relevant und – siehe oben – durch die analogen Elftelteilungen des Syntonischen Kommas voll ersetzbar.

## 2. Die Zwei-Elftel-Teilung bei Gottfried Silbermann

„Wir kennen Georg Andreas Sorge als eifrigen Befürworter der gleichmäßigen Temperatur“<sup>6</sup>. Es ist daher verständlich, daß Sorge die Quintabweichungen der Silbermann-Stimmung in Zwölfteln des Pythagoräischen Kommas, die Großterz- bzw. Kleinterzabweichungen dagegen in Vierundzwanzigsteln der Kleinen Diësis bzw. in Sechsenddreißigsteln der Großen Diësis angibt. In meiner seinerzeitigen Arbeit<sup>7</sup> hatte ich unter den Möglichkeiten, „eine solche Teilung praxisnah auf das

<sup>3</sup> S. Anmerkung 1.

<sup>4</sup> S. Anmerkung 1; S. 124.

<sup>5</sup> A. Schlick, *Spiegel der Orgelmacher und Organisten*, Speyer 1511; Mainz 1959; Blatt 14 recto.

<sup>6</sup> H. K. H. Lange, *Die Orgelstimmung Gottfried Silbermanns*, in: *Acta organologica* 7 (1973), S. 165.

<sup>7</sup> S. Anmerkung 6; S. 168.



Monochord oder in die Stimmpeife zu bekommen“, bereits auf die arithmetische Teilung des Syntonischen Kommas in elf Teile hingewiesen, die ohne größeren mathematischen Aufwand nur mit Hilfe von Multiplikation und Division zu realisieren ist.

Auf Grund unserer heutigen Erkenntnisse können wir sagen, daß die Teilung des Syntonischen Kommas, gleichgültig in wieviele Teile, in der Geschichte der musikalischen Temperatur von überragender Bedeutung ist. Insbesondere scheint die aufgezeigte Teilung der Kommata und Diësen in 10; 11; 12; 21 und 32 Teile einen außerordentlich praktischen Nutzen zu haben, und wir sind davon überzeugt, daß Georg Andreas Sorge von dieser Relation Gebrauch gemacht hätte, wenn sie ihm bekannt gewesen wäre. Hätte nämlich Sorge bei seiner Diskussion der Silbermannschen Temperatur mit den Abweichungen  $+3/21$  und  $+15/21$  für die großen Terzen und  $-5/32$  und  $-17/32$  für die kleinen Terzen gerechnet, so wäre er exakt an die Soll-Werte der Temperatur herangekommen<sup>8</sup>:

Große Terzen	386.314	386.314
	+ 5.866 (3/21)	+ 29.328 (15/21)
	<hr/> 392.180	<hr/> 415.642
	<hr/>	<hr/>
Kleine Terzen	315.641	315.641
	- 9.776 (5/32)	- 33.238 (17/32)
	<hr/> 305.865	<hr/> 282.403
	<hr/>	<hr/>

Ohne Sorges überragende Verdienste auch nur im geringsten schmälern zu wollen, gehen wir daher sicher nicht fehl in der Annahme, daß Silbermann, der ein Mann der Praxis war, seine Quinten nicht um  $2/12$  des Pythagoräischen, sondern um  $2/11$  des Syntonischen Kommas verengte. Die Leichtigkeit der Teilung des Syntonischen Kommas und dessen zentrale Funktion inmitten der anderen Kommata und Diësen sprechen dafür, daß in der praktischen Musikausübung diese Teilung allgemein Anwendung fand, auch wenn aus musikalisch-weltanschaulichen Gründen ein anderes Komma in den Vordergrund gestellt wurde.

$$2/11 \text{ SK} = 1/10 \cdot \sqrt[11]{102\,515\,625\,000};$$

das Reziproke dieses Wertes ist  $1/3 \cdot \sqrt[11]{172\,800}$ .

Die um  $2/11$  des Syntonischen Kommas verengte Quinte ist deshalb  $1/2 \cdot \sqrt[11]{172\,800}$ .

Aus diesen Angaben könnte die Wolfsquinte direkt berechnet werden. Ich gehe aber einen anderen Weg, denn die Abweichung von elf Quinten um je  $2/11$  des Syntonischen Kommas läßt eine aufschlußreiche Beweisführung zu.

Aus den bekannten Beziehungen

- 1) 12 reine Quinten = 7 Oktaven + Pythagoräisches Komma (PK)
- 2) PK = Syntonisches Komma (SK) + Schisma
- 3) Diaschisma = SK - Schisma
- folgt
- 4) Silbermannsche Wolfsquinte = Quinte + Diaschisma
- =  $ases^{+2} = 721.508$  Cents

Beweis:

- |   |                     |
|---|---------------------|
| 12 Quinten - PK                                     | = 7 Oktaven         |
| 12 Quinten - (SK + Schisma)                         | = 7 Oktaven         |
| 11 · (Quinte - $1/11$ SK) + (Quinte - Schisma)      | = 7 Oktaven         |
| 11 · (Quinte - $2/11$ SK) + (Quinte + SK - Schisma) | = 7 Oktaven         |
| 11 · (Quinte - $2/11$ SK) + (Quinte + Diaschisma)   | = 7 Oktaven, q.e.d. |

<sup>8</sup> S. Anmerkung 6; S. 166 und 184.



Tafel 2 Teilungen der Kommata und Diësen.

	Diaschisma 10 Teile	Syntonisches Komma 11 Teile	Pythagoreisches Komma 12 Teile	Kleine Diësis 21 Teile	Große Diësis 32 Teile
1	1.955 256 881	1.955 117 236	1.955 000 865	1.955 183 734	1.955 160 875
2	3.910 513 762	3.910 234 472	3.910 001 731	3.910 367 467	3.910 321 750
3	5.865 770 643	5.865 351 708	5.865 002 596	5.865 551 201	5.865 482 625
4	7.821 027 524	7.820 468 944	7.820 003 462	7.820 734 934	7.820 643 500
5	9.776 284 404	9.775 586 180	9.775 004 327	9.775 918 668	9.775 804 375
6	11.731 541 285	11.730 703 416	11.730 005 192	11.731 102 402	11.730 965 250
7	13.686 798 166	13.685 820 652	13.685 006 058	13.686 286 135	13.686 126 125
8	15.642 055 047	15.640 937 889	15.640 006 923	15.641 469 869	15.641 287 001
9	17.597 311 928	17.596 055 125	17.595 007 788	17.596 653 602	17.596 447 876
10	19.552 568 809	19.551 172 361	19.550 008 654	19.551 837 336	19.551 608 751
11	21.507 825 690	21.506 289 597	21.505 009 519	21.507 021 070	21.506 769 626
12	23.463 082 571	23.461 406 833	23.460 010 385	23.462 204 803	23.461 930 501
13	25.418 339 451	25.416 524 069	25.415 011 250	25.417 388 537	25.417 091 376
14	27.373 596 332	27.371 641 305	27.370 012 115	27.372 572 270	27.372 252 251
15	29.328 853 213	29.326 758 541	29.325 012 981	29.327 756 004	29.327 413 126
16	31.284 110 094	31.281 875 777	31.280 013 846	31.282 939 738	31.282 574 001
17	33.239 366 975	33.236 993 013	33.235 014 712	33.238 123 471	33.237 734 876
18	35.194 623 856	35.192 110 249	35.190 015 577	35.193 307 205	35.192 895 751
19	37.149 880 737	37.147 227 485	37.145 016 442	37.148 490 938	37.148 056 626
20	39.105 137 618	39.102 344 721	39.100 017 308	39.103 674 672	39.103 217 501
21	41.060 394 498	41.057 461 957	41.055 018 173	41.058 858 405	41.058 378 376
22	43.015 651 379	43.012 579 193	43.010 019 039	43.014 042 139	43.013 539 252
23	44.970 908 260	44.967 696 429	44.965 019 904	44.969 225 873	44.968 700 127
24	46.926 165 141	46.922 813 666	46.920 020 769	46.924 409 606	46.923 861 002
25	48.881 422 022	48.877 930 902	48.875 021 635	48.879 593 340	48.879 021 877
26	50.836 678 903	50.833 048 138	50.830 022 500	50.834 777 073	50.834 182 752
27	52.791 935 784	52.788 165 374	52.785 023 365	52.789 960 807	52.789 343 627
28	54.747 192 665	54.743 282 610	54.740 024 231	54.745 144 541	54.744 504 502
29	56.702 449 545	56.698 399 846	56.695 025 096	56.700 328 274	56.699 665 377
30	58.657 706 426	58.653 517 082	58.650 025 962	58.655 512 008	58.654 826 252
31	60.612 963 307	60.608 634 318	60.605 026 827	60.610 695 741	60.609 987 127
32	62.568 220 188	62.563 751 554	62.560 027 692	62.565 879 475	62.565 148 002